Das Potts-Modell zum Entrauschen digitaler Mammographien

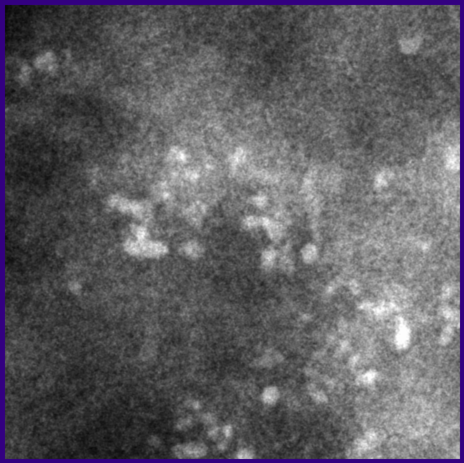
Projektvortrag, 1.10.2002

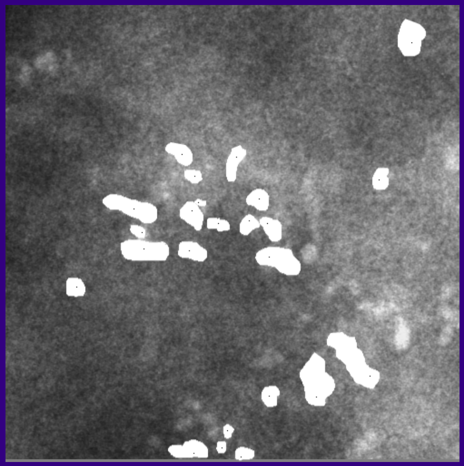
Katrin Wicker

Überblick

- Einleitung, Modellvorstellung
- Das 1d Potts Modell
- Das 2d Potts Modell
- Berechnungsregeln
- Demonstration

Anwendungsbezogenes Fernziel: Detektion von Mikrokalken in Mammographien.



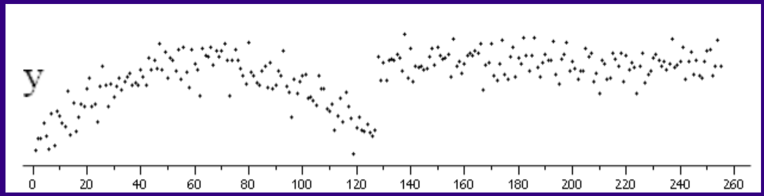


Ein Ausschnitt aus einer Mammographie, rechts Mikrokalke von einem Radiologen eingefärbt.

- Restauration mit Potts Modell soll allerersten Schritt für weitere Analyse der Daten mit anderen Methoden sein.
- Ziel: möglichst unspezifische Vereinfachung des Signals
- Inhalt des Projektes: Implementierung eines 2d Quasi-Potts-Minimierers, Anwendung auf Mammographien.

Modellvorstellung

Gegeben: Beobachtung $y = \{y_1, \dots, y_n\}$, $y_i \in \mathbb{R}$, $n, d \in \mathbb{N}$



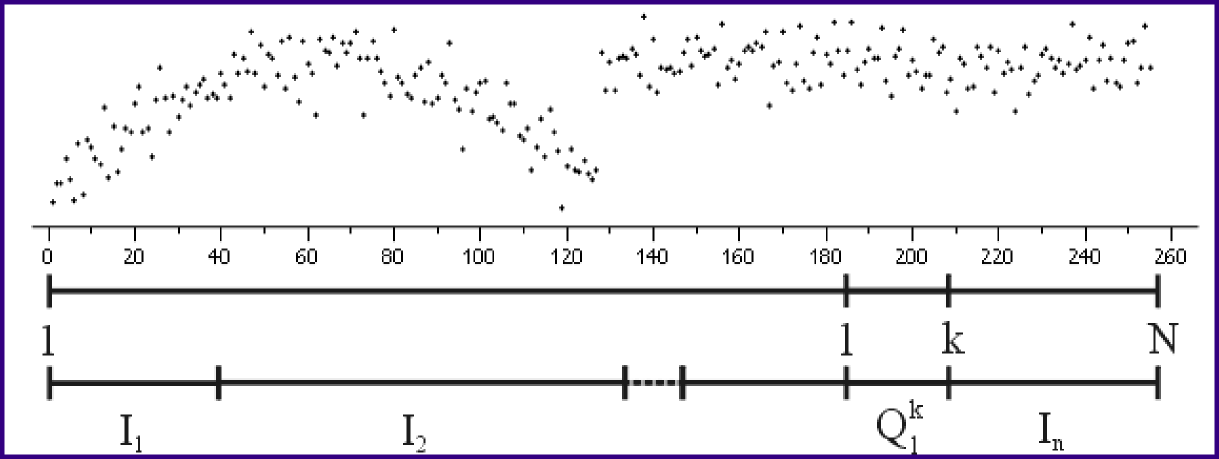
Gesucht: ,,Rekonstruktion'' $x = \{x_1, \dots, x_n\}$

Suche möglichst gute Approximation von y durch ein stückweise konstantes Signal x. (deterministisch)

Potts Modell:

$$H_y(x) := \gamma \, |s \sim t : x_s \neq x_t| + \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2$$

Partitionen



- $P = (I_1, \ldots, I_n)$: Partition von $\{1, \ldots, N\}$, $n \leq N$
- $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n), \mu_i \in \mathbb{R}$: Werte auf Intervallen
- P^l : Partition von $\{1, \ldots, l\}, l \leq N$
- $Q_l^k = \{l, \ldots, k\}$: Partition mit einem Intervall

Modell auf Partitionen:

$$h_y(P) := \gamma[|P| - 1] + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in I_i} (\mu_i - y_j)^2$$

Sei $I \subset \{1, \ldots, N\}$:

$$\widehat{\mu}(I) := \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} y_i,$$

$$\widehat{\sigma}(I) := \sum_{i \in I} (\widehat{\mu}(I) - y_i)^2$$

Satz 1 *Sei eine Partition P von $\{1, \ldots, N\}$ fest gegeben. Der Minimierer der Funktion $h_y(P)$ (in μ) unter allen auf den Intervallen $I_1, \ldots, I_n$ konstanten Vektoren ist*

$$\widehat{\mu}(P) = (\widehat{\mu}(I_1), \ldots, \widehat{\mu}(I_n))$$

Lemma 1 *Es existiert ein Minimierer $\widehat{P}$ für $h_y(P)$ (in μ und P).*

Der Minimierer von h_y

Lemma 2 *Seien* p, q *Teil-Partitionen von* P *mit* $P = (p, q)$, *dann*

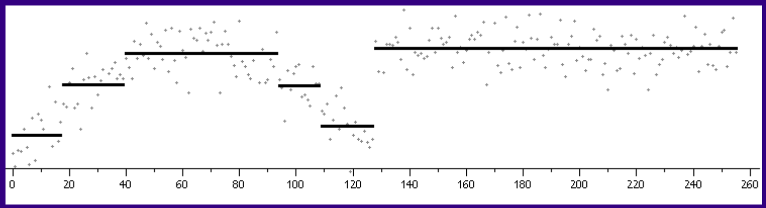
$$h_y(p, q) = h_y(p) + h_y(q) + \gamma$$

und $h_y(I) = \widehat{\sigma}(I)$ *für ein Intervall* I.

Satz 2 *Seien* $1 \leq l < k \leq N$ *und* $P_l^k = \left(\widehat{P}^l, Q_{l+1}^k\right)$.
Sei $\widehat{l}$ *Minimierer von* $h_y(P_l^k)$ *(d.h.* $h_y(P_{\widehat{l}}^k) = \min_{l \in \{1,\ldots,k-1\}} h_y(P_l^k)$*).*
Dann ist

$$h_y(P_{\widehat{l}}^k) = h_y(\widehat{P}^k)$$

Satz 3 *Ein Minimierer von* h_y *ist Minimierer von* H_y.



Der Algorithmus

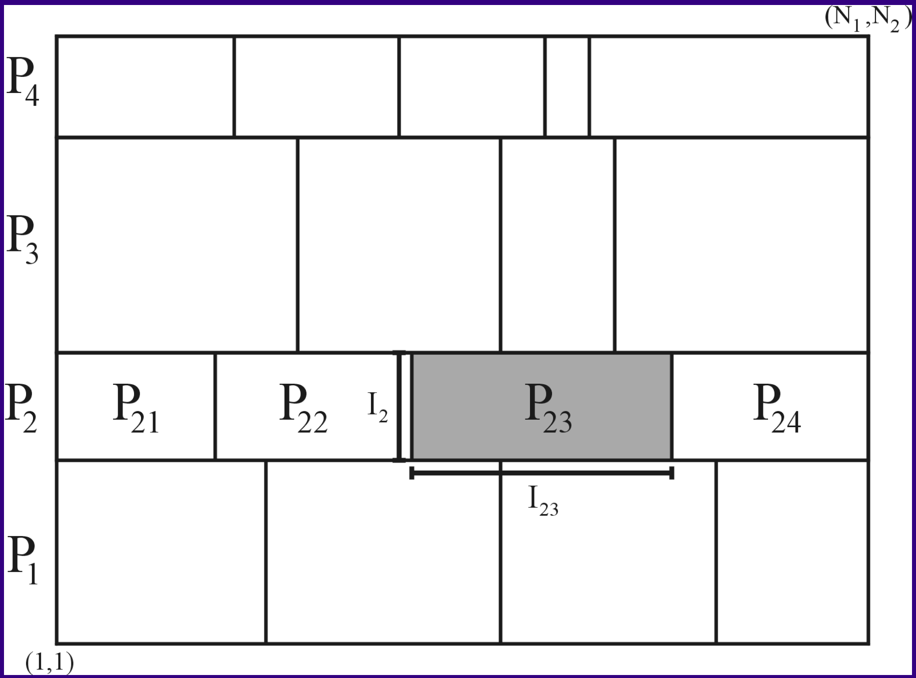
- VAR $\widehat{l}$: ARRAY $N+1$ OF INT; h: ARRAY $N+1$ OF REAL;

- $h(0) = h(1) := 0$, $l(0) = l(1) := 0$, $k := 2$

- WHILE($k \leq N$) DO
  $\widehat{l}(k) := \arg\min_{l \in \{0,\ldots,k-1\}}(h(l) + \gamma + \sigma_{l+1}^k)$
  $h(k) := \min_{l \in \{0,\ldots,k-1\}}(h(l) + \gamma + \sigma_{l+1}^k)$
  $k := k + 1$
  END;

- $k := N$, $\widehat{P}^k = P_{\widehat{l}(k)}^k$ (rekursiv)

2d Partitionen



- $P = (P_1, \ldots, P_n)$: Partition (vertikal) mit
  $P_i = (P_{ij})_{j=1,\ldots,m_i} = [(I_i \times I_{i1}), \ldots, (I_i \times I_{im_i})]$ (horizontal)
  $|P| := \sum_i m_i$ Anzahl der verallgemeinerten Intervalle
- $\mu = (\mu(J))_{J \in P}$: (konstante) Werte in der Partition

Das 2d Modell

$$
\begin{aligned}
h_y(P) \;&:=\; \gamma|P| + \sum_{J\in P}\sum_{j\in J}(\mu(J)-y_j)^2 \\
&=\; \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left[\gamma|P_i| + \sum_{J\in P_i}\sum_{j\in J}(\mu(J)-y_j)^2\right]}_{h_y^*(P_i)}
\end{aligned}
$$

- Wie in Satz 1 minimiert $\widehat{\mu}$ bei festgelegter Partition P die Funktion $h_y(P)$ (in μ).
- $h_y^*(P_j)$, $1 \leq j \leq n$ läßt sich analog zu Satz 2 minimieren (horizontal), denn mit $p, q \in P_j$, $(p, q) = P_j$ gilt $h_y^*(p, q) = h_y^*(p) + h_y^*(q)$.

Minimierung in 2d

Bezeichne
P^l : Partition von $(1,\ldots,l)\times(1,\ldots,N_2)$, $l\le N_1$ und
$\widehat{Q}_l^k$: Minimierer von $h_y^*(Q_l^k)$,mit $Q_l^k = ((J\times J_1),\ldots,(J\times J_m))$,
wobei $J=\{l,\ldots,k\}$ und $(J_1,\ldots,J_m)$ Partition von $(1,\ldots,N_2)$,
$(1\le l<k\le N_1,\ 1\le m\le N_2)$.

Satz 2 läßt sich unverändert anwenden:

Satz 4 *Seien* $1\le l<k\le N_1$ *und* $P_l^k = \left(\widehat{P}^l,\widehat{Q}_{l+1}^k\right)$.
Sei $\hat{l}$ *Minimierer von* $h_y(P_l^k)$ *(d.h.* $h_y(P_{\hat{l}}^k) = \min_{l\in\{1,\ldots,k-1\}} h_y(P_l^k)$*).*
Dann ist

$$h_y(P_{\hat{l}}^k) = h_y(\widehat{P}^k)$$

Mittelwert- und Varianzbestimmung

Um die Partitionen in $O((N_1 N_2)^2)$ berechnen zu können, müssen Mittelwert und Varianz der Daten auf Rechtecken in fester Anzahl Schritten bestimmt werden.

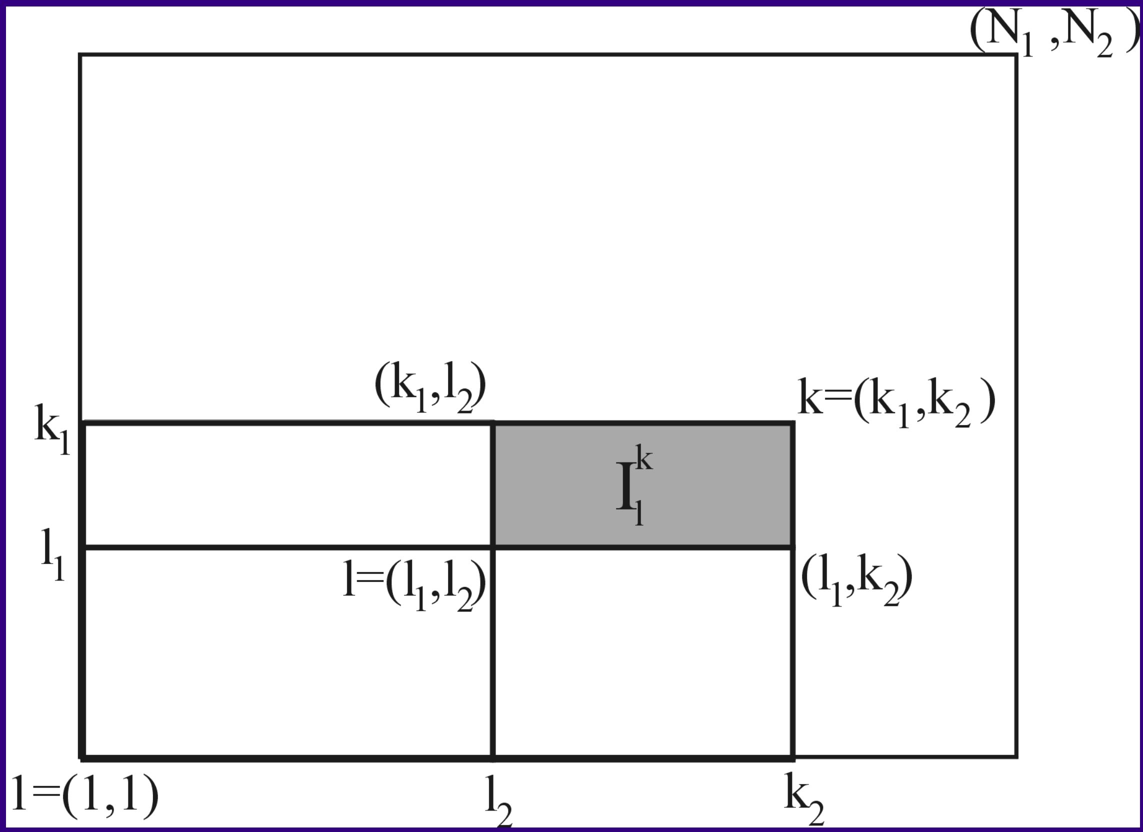
Seien dazu $S = \{1, \ldots, N_1\} \times \{1, \ldots, N_2\}$ und

$$\begin{aligned} Y &= (y_{st})_{(s,t)\in S} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1N_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N_1 1} & y_{N_1 2} & \cdots & y_{N_1 N_2} \end{pmatrix}, \\ B &= (b_{st})_{(s,t)\in S} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} y_{ij}. \end{aligned}$$

benötigt:

- $\widehat{\mu}(I) = \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} y_i$
- $\widehat{\sigma}(I) = \sum_{i \in I} (\widehat{\mu}(I) - y_i)^2 = \sum y_i^2 - |I|(\widehat{\mu}(I))^2$

für Rechtecke $I \subset S$.



$$\sum_{s\in I_l^k} y_s = \sum_{\substack{l_1<i\le k_1\\ l_2<j\le k_2}} y_{ij} = \sum_{\substack{0<i\le k_1\\ 0<j\le k_2}} y_{ij} - \sum_{\substack{0<i\le k_1\\ 0<j\le l_2}} y_{ij} - \sum_{\substack{0<i\le l_1\\ 0<j\le k_2}} y_{ij} + \sum_{\substack{0<i\le l_1\\ 0<j\le l_2}} y_{ij}$$

$$= b_{k_1k_2} - b_{k_1l_2} - b_{l_1k_2} + b_{l_1l_2}$$

Algorithmus für den 2d Fall

- VAR $\hat{l}$: ARRAY N_1+1 OF INT; h: ARRAY N_1+1 OF REAL;

- $h(0) = h(1) :=$ 0, $l(0) = l(1) :=$ 0 $k := 2$

- WHILE($k \leq N$) DO
  $\hat{l}(k) := \arg\min_{l\in\{0,\ldots,k-1\}}(h(l) + \text{getmin}(l,k))$
  $h(k) := \min_{l\in\{0,\ldots,k-1\}}(h(l) + \text{getmin}(l,k))$
  $k := k + 1$
  END;

- $k := N_1$, $\hat{P}^k = P^k_{\hat{l}(k)}$ (rekursiv)

- **g**etmin(from,to)
  - ⋆ VAR $\widehat{l}$: ARRAY $N_2 + 1$ OF INT; h: ARRAY $N_2 + 1$ OF REAL;
  - ⋆ $h(0) = h(1) := 0$, $l(0) = l(1) := 0$ $k := 2$
  - ⋆ WHILE($k \leq N$) DO

    $\widehat{l}(k) := \arg\min_{l \in \{0,\ldots,k-1\}}(h(l) + \hat{\sigma}(\{\text{from}, \ldots, \text{to}\} \times \{l, \ldots, j\}) + \gamma)$

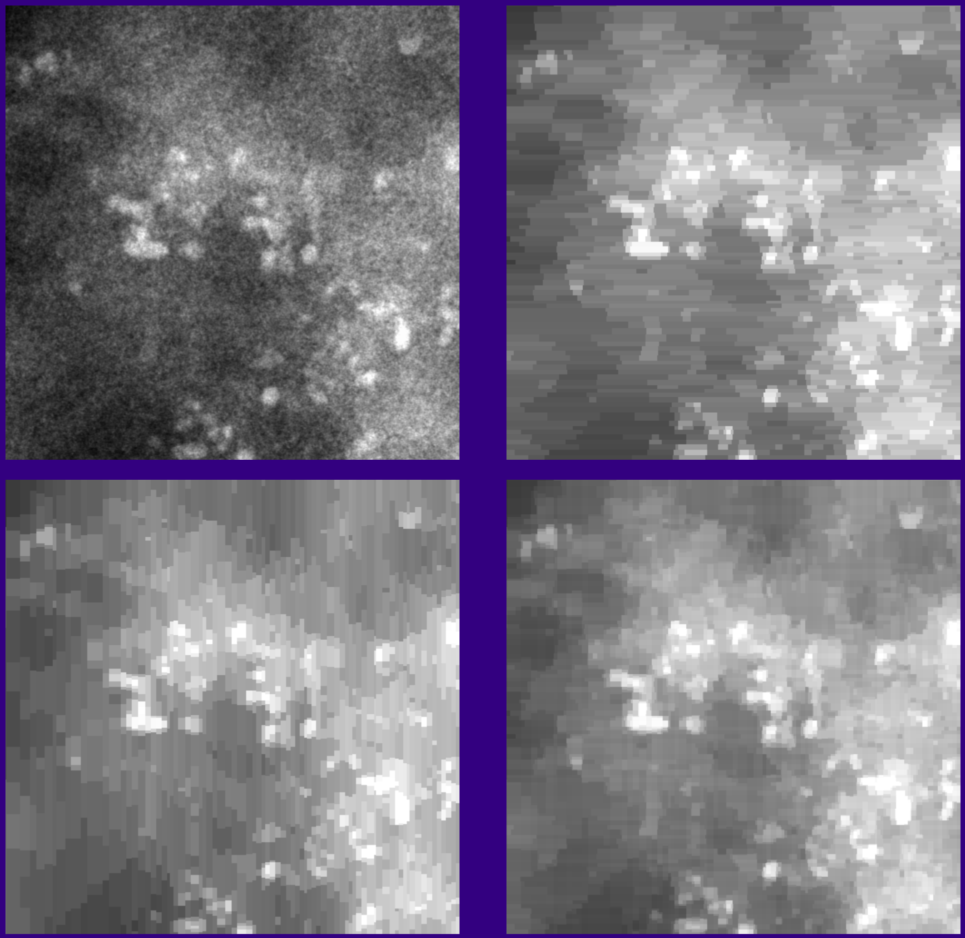
    $h(k) := \min_{l \in \{0,\ldots,k-1\}}(h(l) + \hat{\sigma}(\{\text{from}, \ldots, \text{to}\} \times \{l, \ldots, j\}) + \gamma)$

    $k := k + 1$

    END;

  END;

Demonstration



Original, horizontale und vertikale Rekonstruktion sowie Summe, $\gamma = 0.5$

Beweis zu Satz 2

$$
\begin{aligned}
h_y(\widehat{P}^N) &= \min_{\tilde{P}\in J(\{1,\ldots,N\})} h_y(\tilde{P}) \\
&= \min_{k\in\{1,\ldots,N\}} \min_{\tilde{P}\in J(\{1,\ldots,k\})} \{h_y(\tilde{P}, Q_k^N)\} \\
&= \min_{k\in\{1,\ldots,N\}} \min_{\tilde{P}\in J(\{1,\ldots,k\})} (h_y(\tilde{P}) + \gamma + \sigma_k^N) \\
&= \min_{k\in\{1,\ldots,N\}} \left[\left(\min_{\tilde{P}\in J(\{1,\ldots,k\})} h_y(\tilde{P})\right) + \gamma + \sigma_k^N\right] \\
&= \min_{k\in\{1,\ldots,N\}} (h_y(\widehat{P}^k) + \gamma + \sigma_k^N) \\
&= h_y(P_{\hat{k}}^N)
\end{aligned}
$$

Der Schluss des Beweises erfolgt per Induktion.